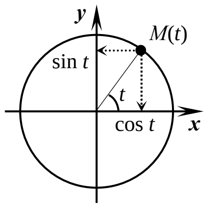
## Определение тригонометрических функций

**Функция косинус** — это функция, которая ставит в соответствие каждому числу $t$ абсциссу точки $M(t)$ координатной окружности.

**Функция синус** — это функция, которая ставит в соответствие каждому числу $t$ ординату точки $M(t)$ координатной окружности.




| |
|---|
| Если $M(t) = M(x; y)$, то $x = \cos t$, $y = \sin t$ |

Таким образом,

| |
|---|
| $\mathbf{M(t) = M(\cos t; \sin t)}$ |

NB *Запись M(t) показывает положение точки M на координатной окружности, а запись M(cos t; sin t) – положение той же точки на координатной плоскости.*

**Функция тангенс** — это частное от деления функции синус на функцию косинус.

**Функция котангенс** — это частное от деления функции косинус на функцию синус.

W Поскольку деление на нуль невозможно, функции tg $t$ и ctg $t$ определены не для всех значений аргумента. Тангенс определен лишь для значений аргумента, при которых $\cos t \neq 0$, котангенс определен при $\sin t \neq 0$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \text{где} \quad t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

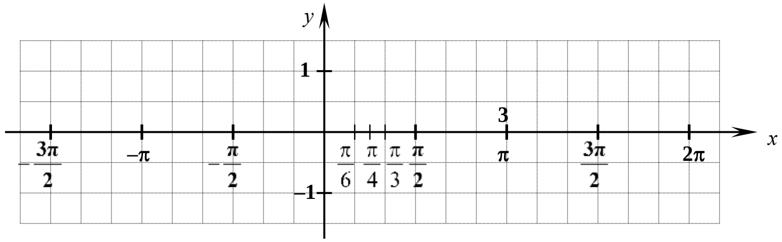
$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \text{где} \quad t \neq \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

**Тригонометрические функции** — это общее название функций синус, косинус, тангенс и котангенс.

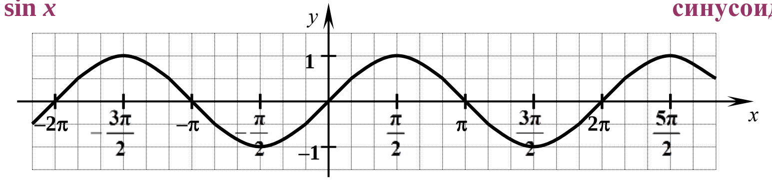


## Графики тригонометрических функций

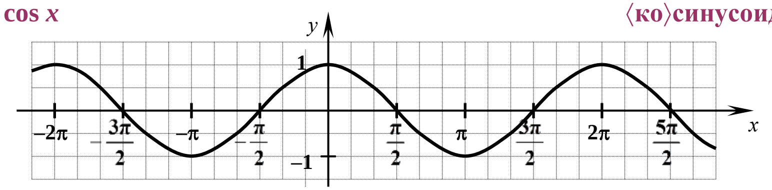
Тригонометрический набор координат:



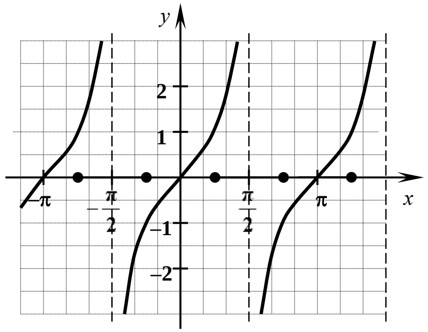
**$y = \sin x$** **синусоида**



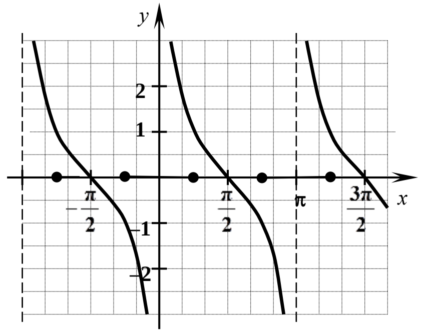
**$y = \cos x$** **⟨ко⟩синусоида**

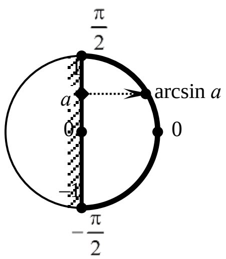


**$y = \operatorname{tg} x$**
**тангенсоида**



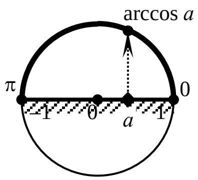
**$y = \operatorname{ctg} x$**
**⟨ко⟩тангенсоида**





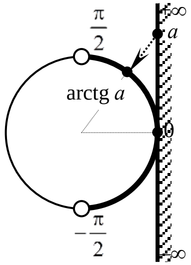

**Арксинусом** числа $a$ называется такое число $x$ из интервала $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$.

$$\arcsin \overset{[-1;1]}{a} = \overset{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{x}, \quad \sin x = a$$



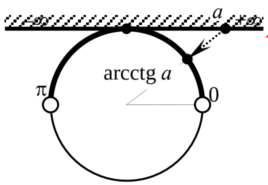

**Арккосинусом** числа $a$ называется такое число $x$ из интервала $[0;\ \pi]$, косинус которого равен $a$.

$$\arccos \overset{[-1;1]}{a} = \overset{[0;\pi]}{x}, \quad \cos x = a$$




**Арктангенсом** числа $a$ называется такое число $x$ из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $a$.

$$\operatorname{arctg} a = \overset{\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}{x}, \quad \operatorname{tg} x = a$$




**Арккотангенсом** числа $a$ называется такое число $x$ из интервала $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен $a$.

$$\operatorname{arcctg} a = \overset{(0;\pi)}{x}, \quad \operatorname{ctg} x = a$$

W

1. Для отрицательных значений аргумента:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \qquad \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \qquad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

2. Из определения аркфункции сразу следует, что:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\arcsin a) &= a\\ \cos(\arccos a) &= a\end{aligned}\right\} \text{где } a \in [-1;\ 1] \qquad \begin{aligned}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) &= a\\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) &= a\end{aligned}$$



## Значения тригонометрических функций некоторых углов

таблица 1

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **sin α** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | –1 |
| **cos α** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 |
| **tg α** | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — | 0 | — |
| **ctg α** | — | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | — | 0 |

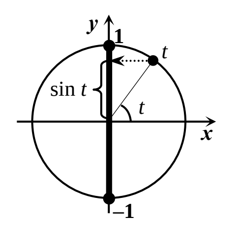
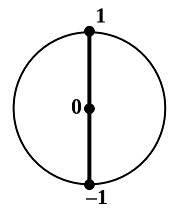
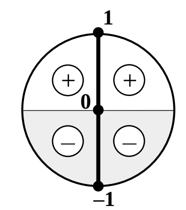
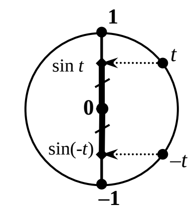
## Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

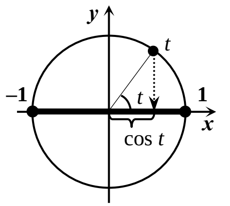
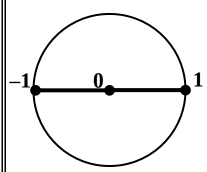
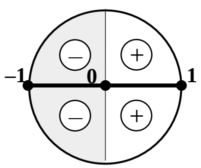
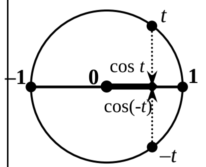
таблица 2

| **Искомая функция** | **Выражение искомой функции через** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **sin α** | **cos α** | **tg α** | **ctg α** |
| **sin α =** | $\sin\alpha$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ | $\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ |
| **cos α =** | $\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ | $\cos\alpha$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ | $\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$ |
| **tg α =** | $\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ | $\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ |
| **ctg α =** | $\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$ | $\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$ | $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |

Учитель математики Новосельская О.А. МБОУ СОШ №210 г.Новосибирск

## Свойства синуса и косинуса

| Линия синусов | Область значений | Знаки по четвертям | Четность – нечетность |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| | $\lvert\sin t\rvert \le 1$ | | $\sin(-t) = -\sin t$ |

| Линия косинусов | Область значений | Знаки по четвертям | Четность – нечетность |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| | $\lvert\cos t\rvert \le 1$ | | $\cos(-t) = \cos t$ |

### Область определения

$D(\sin) = \boldsymbol{R}$ $D(\cos) = \boldsymbol{R}$

### Область значений

$E(\sin) = [-1; 1]$ $E(\cos) = [-1; 1]$

### Четность – нечетность

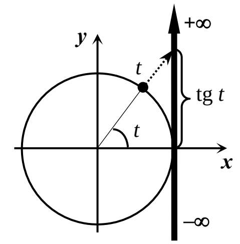
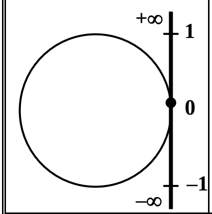
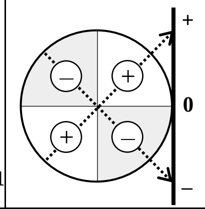
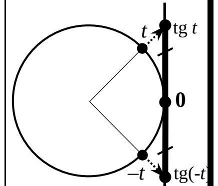
нечетная функция четная функция

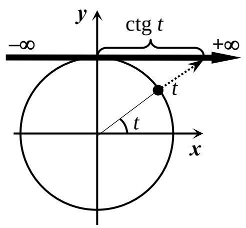
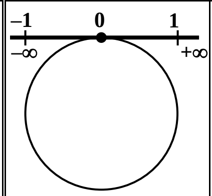
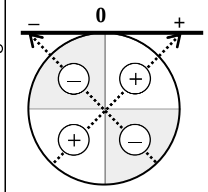
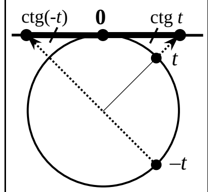
### Периодичность

$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$



## Свойства тангенса и котангенса

| Линия тангенсов | Область значений | Знаки по четвертям | Четность – нечетность |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| | $\mathrm{tg}\, t \in (-\infty; +\infty)$ | | $\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\, t$ |

| Линия котангенсов | Область значений | Знаки по четвертям | Четность – нечетность |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| | $\mathrm{ctg}\, t \in (-\infty; +\infty)$ | | $\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\, t$ |

### Область определения

$D(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ $D(\mathrm{ctg}) = \boldsymbol{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$

### Область значений

$E(\mathrm{tg}) = (-\infty; +\infty)$ $E(\mathrm{ctg}) = (-\infty; +\infty)$

### Четность – нечетность

нечетная функция нечетная функция

### Периодичность

**$\mathrm{tg}(x \pm \pi) = \mathrm{tg}\, x$** $\mathrm{ctg}(x \pm \pi) = \mathrm{ctg}\, x$

Учитель математики Новосельская О.А. МБОУ СОШ №210 г.Новосибирск